A SIMPLE PROOF OF A THEOREM IN THE CALCULUS OF VARIATIONS

(EXTRACT FROM A LETTER TO MR. W. F. OSGOOD)*

BY

E. GOURSAT

Introductory note.—The proof of the fundamental theorem of my paper entitled: *On a fundamental property of a minimum in the calculus of variations and the proof of a theorem of Weierstrass's*, Transactions, vol. 2 (1901), p. 273, was simplified by BOLZA, ibid., p. 422. In a letter bearing the date June 21, 1903, Professor GOURSAT has communicated to me a new proof of this theorem, which for simplicity and directness leaves nothing to be desired. With his permission an extract from his letter, containing this proof, is here given.

W. F. OSGOOD.

En lisant votre mémoire sur le calcul des variations, dans les Transactions of the American Mathematical Society (vol. 2, 1901), il m'a semblé que la démonstration du théorème fondamental de la page 286 pouvait être simplifiée comme il suit.

La fonction $f(x)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), où $a < b$, et admettant une dérivée $f'(x)$ continue dans cet intervalle, il s'agit de trouver une limite inférieure de l'intégrale definie

$$\int_a^l f'(x)^2 dx, \qquad a < l \leqq b.$$

Je m'appuie pour cela sur la remarque élémentaire suivante. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

$$h_1, h_2, \cdots, h_n,$$

deux suites de n nombres, les h_i étant tous positifs. On a toujours

$$\frac{\alpha_1^2}{h_1} + \frac{\alpha_2^2}{h_2} + \cdots + \frac{\alpha_n^2}{h_n} \geqq \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^2}{h_1 + h_2 + \cdots + h_n}.$$

* Presented to the Society October 31, 1903. Received for publication September 23, 1903.

On le vérifie immédiatement si $n = 2$, et on l'étend ensuite de proche en proche. Cela posé, décomposons l'intervalle (a, l) en intervalles partiels

$$a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, l$$

et soit

$$h_1 = x_1 - a, \qquad h_2 = x_2 - x_1, \cdots, h_n = l - x_{n-1}.$$

On a respectivement

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(a) &= h_1 f'(\xi_1), & a < \xi_1 < x_1, \\ f(x_2) - f(x_1) &= h_2 f'(\xi_2), & x_1 < \xi_2 < x_2, \\ &\cdots\cdots & \\ f(l) - f(x_{n-1}) &= h_n f'(\xi_n), & x_{n-1} < \xi_n < l. \end{aligned}$$

On en tire

$$\begin{aligned} &[f'(\xi_1)]^2 h_1 + [f'(\xi_2)]^2 h_2 + \cdots + [f'(\xi_n)]^2 h_n \\ &\quad = \frac{[f(x_1) - f(a)]^2}{h_1} + \frac{[f(x_2) - f(x_1)]^2}{h_2} + \cdots + \frac{[f(l) - f(x_{n-1})]^2}{h_n}, \end{aligned}$$

et le second membre est d'aprés la remarque faite plus haut,

$$\geqq \frac{[f(l) - f(a)]^2}{l - a},$$

ou

$$\geqq \frac{L^2}{l - a},$$

L désignant, d'aprés votre notation, $|f(l) - f(a)|$. En faisant croître n indéfiniment, on a donc à la limite

$$\int_a^l [f'(x)]^2 dx \geqq \frac{L^2}{l - a}. \tag{1}$$

L'inégalité

$$\int_a^l [f'(x)]^2 dx \geqq \frac{L^3}{54(b - a)^2} \tag{2}$$

sera assurée si l'on a

$$\frac{L^3}{54(b - a)^2} < \frac{L^2}{l - a},$$

ou

$$L < \frac{54(b - a)^2}{l - a}.$$

Il en sera ainsi toutes les fois que L est $< 3\sqrt{2}(b - a)$, puisque l'on a

$$3\sqrt{2}(b-a) < \frac{54(b-a)^2}{l-a},$$

lorsque

$$a < l \leqq b.$$

Il serait facile de généraliser le théorème, si cela pouvait être de quelque utilité.